POTYCZKI MATEMATYCZNE

2018/2019 klasa 3 – gimnazjum

1. Ustal ostatnią cyfrę liczby $(3^{12} + 3^{35} + 5^{11})^2$.
2. Uzasadnij, że liczba $(2^{15} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{18})$ jest podzielna przez 3 i 5.
3. Uzasadnij, że liczba $(3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n)$ dla $n \in N$ jest wielokrotnością liczby 10.
4. Wykaż, że jeśli n jest liczbą naturalną, to liczba $A = n^6 - n^4 - n^2 + 1$, dzieli się przez 32.
5. Reszty z dzielenia przez 5 liczb naturalnych A; B; C; D wynoszą odpowiednio: 1,2,3,4. Wykaż, że suma A+B+C+D jest podzielna przez 5.
6. W pewnej grupie uczniów średnia wieku wynosi 11 lat. Najstarszy z nich ma 17 lat, a średnia wieku pozostałych wynosi 10 lat. Ilu uczniów liczy cała grupa?
7. Ola obliczyła, że średnia jej ocen z I semestru z 10 przedmiotów wynosi 3,9. Zaplanowała, że w następnym semestrze poprawi ocenę z matematyki z 3 na 4, a z geografii z 4 na 5. O jakiej średniej marzy Ola?
8. W pewnej fabryce przez 20 dni produkowano po 600 sztuk szklanek. W ten sposób zrealizowano 40% zamówienia. O ile procent należy zwiększyć dzienną produkcję, aby w ciągu następnych 24 dni zakończyć realizacje zamówienia?
9. Ile ton rudy o zawartości 65% żelaza i ile ton rudy o zawartości 70% żelaza należy zmieszać, aby otrzymać 15 ton rudy o zawartości 68% żelaza?
10. Ile trzeba odparować wody z 3 kilogramów roztworu wodnego soli kuchennej o stężeniu 5%, żeby otrzymać roztwór o stężeniu 30%?
11. Obok siebie stoją dwa zbiorniki zawierające roztwór kwasu siarkowego i wody. W pierwszym zbiorniku stężenie kwasu i wody wynosi 2:3, natomiast w drugim 3:7. Ile litrów roztworu należy wziąć z każdego zbiornika, aby po zmieszaniu otrzymać 12 litrów roztworu, w którym stosunek kwasu siarkowego i wody wynosił 3:5?
12. Antykwariusz kupił dwa przedmioty płacąc za nie 250 złoty. Następnie sprzedał je z zyskiem 24%. Ile zapłacił za każdy przedmiot, jeżeli pierwszy sprzedał o 15% drożej, a drugi o 30% drożej?
13. W klasie liczącej 30 uczniów co trzecia osoba to chłopiec. Co drugi chłopiec i co piąta dziewczynka noszą okulary. Ile procent uczniów tej klasy nosi okulary?
14. Droga z miejscowości A do B biegnie po płaskim terenie oraz pod górę i z góry. Po drodze na płaskim terenie rowerzysta jedzie ze średnią prędkością 12 km/h,

pod górę 8 km/h, a z góry 15 km/h. Drogę z A do B rowerzysta przejechał w ciągu 5 godzin, a z powrotem podróż zajęła mu 4 godziny i 39 minut. Oblicz odległość między miejscowościami A i B wiedząc, że droga na terenie płaskim ma długość 28 km.

15. Dwaj bracia zrywali jabłka z drzewa i na koniec pracy podzielili się po równo. Jeden z nich ułożył swoje jabłka tuzinami zauważył, że ma jabłek więcej niż 6 tuzinów, ale mniej niż 7 tuzinów. Drugi z braci ułożył jabłka na półkach rzędami po jednym mendlu na każdej i spostrzegł, że na ostatniej półce jest tylko 5 jabłek. Ile jabłek zerwali razem bracia?

16. Statek wypłynął z przystani A do przystani B o godz. 7.00, a wrócił o godz. 17.00, przy czym postój w B trwał 2 godziny. Jak długa jest droga wodna z A do B, jeżeli prędkość rzeki wynosi 3 km/h, a prędkość statku na wodzie stojącej 18 km/h ?

17. W pewnej klasie chłopcy zebrali 120kg makulatury, dziewczęta 78kg. Średnio każdy chłopiec zebrał o 1kg makulatury więcej niż dziewczyna. Ile było dziewcząt, a ilu chłopców w tej klasie, jeśli stosunek ilości chłopców do ilości dziewcząt wynosi 4:3?

18. Pasażer pociągu po przejechaniu połowy drogi położył się spać. Po przebudzeniu stwierdził, że pozostała mu do końca podróży połowa tej drogi, którą przespał. Jaką część całej drogi przespał pasażer?

19. Za każdy przepracowany dzień robotnik otrzymywał od pracodawcy 56zł, za każdy wolny zwracał mu 14zł. Po 30 dniach okazało się, robotnik nic nie zarobił. Ile dni pracował?

20. Jeśli od średniej arytmetycznej wieku Asi i Wojtka, wyrażonej w latach odejmiemy 1, to otrzymamy wiek Kasi. Jeśli od średniej arytmetyczne wieku Asi i Kasi odejmiemy 4, to otrzymamy wiek Wojtka. Jaka jest różnica wieku między Kasią a Wojtkiem?

21. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt D zaznaczony na boku AB. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC wiedząc, że $|AD| = |DB| = |AC| = |CD|$.

22. Kąty ABC i CBD są przyległe. Poprowadzono dwusieczne tych kątów oraz prostą równoległą do prostej AD, która przecina te dwusieczne odpowiednio w punktach E i F, zaś ramię BC w punkcie K. Uzasadnij, że $|EK| = |KF|$.

23. Wykaż, że jeżeli w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy podstawie jest prostopadła do ramienia to trójkąt jest równoboczny.

24. Przekątna prostokąta jest nachylona do jednego z boków pod kątem 30^0. Uzasadnij, że pole prostokąta jest równe polu trójkąta równobocznego o boku równym przekątnej tego prostokąta.
25. Prostokąt ma wymiary 10 x 7 [cm]. Zwiększając każdy bok odpowiednio o „x" cm, otrzymano nowy prostokąt, którego obwód wynosi 54 cm. Oblicz pole większego prostokąta.
26. W pewnym prostokącie miara kąta między przekątną a dłuższym bokiem stanowi 20% miary kąta między tą przekątną a krótszym bokiem. O ile procent większa jest miara kąta rozwartego między przekątnymi od miary kąta ostrego między tymi przekątnymi?
27. Obwód prostokąta wynosi 30cm. Wewnątrz tego prostokąta narysowano prostokąt, którego boki są odpowiednio równolegle do boków danego prostokąta i odległe od nich o 3cm. Oblicz pole powstałej ramki.
28. Stosunek dłuższej przyprostokątnej do przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym to 12:13. Różnica długości między średnim a najkrótszym bokiem wynosi 35 mm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.
29. Promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ma 8cm. Kąt między ramionami tego trójkąta ma 45^0. Oblicz pole tego trójkąta.
30. W trapezie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli podstawę na dwa odcinki o długościach 3 cm i 15 cm. Oblicz pole powierzchni tego trapezu wiedząc, że jego obwód wynosi 40cm.
31. W trapezie o podstawach |AB|=10cm i |CD|=6cm, przedłużono ramiona |BC| =2cm i |AD|=3cm do przecięcia w punkcie S. Oblicz obwód trójkąta ABS.
32. Na okręgu wybrano kolejno punkty A, B, C, D, które podzieliły okrąg na części w stosunku 1:1:3:5. Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta ABCD.
33. Każdy z trzech okręgów o środkach A,B,C jest styczny zewnętrznie do dwóch pozostałych. Znając, że odległości $|AB| = 8$cm, $|AC| = 10$cm, $|BC| = 6$cm oblicz długości promieni tych okręgów.
34. Obwód działki warzywnej w kształcie trapezu równoramiennego wynosi 56 m. Stosunek długości jego podstaw wynosi 2:1, a stosunek długości ramienia do długości wysokości 5:4. Właściciel chce zmienić kształt tej działki na kwadratowy o tym samym polu. Jaką długość będzie miał bok tego kwadratu?
35. Pan Emil ma prostokątną działkę o powierzchni 60 arów. Stosunek długości do szerokości działki wynosi 5:3. Wzdłuż ogrodzenia chce posadzić drzewka ozdobne w ten sposób, że na każdym wierzchołku tej działki ma rosnąć drzewko,

a pozostałe mają być sadzone co 10m. Oblicz, ile drzewek musi zakupić pan Emil.

36. Szerokość prostokątnego parku stanowi 25% jego długości. Idąc z prędkością 5 km/h można obejść park dookoła w ciągu o,25 godziny. Ile hektarów ma powierzchnia parku?

37. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $\sqrt{12}$ cm i jest równa przekątnej podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

38. Podstawą graniastosłupa jest romb. Długości przekątnych podstawy i wysokość graniastosłupa mają się do siebie jak 1:2:5. Oblicz pole całkowite graniastosłupa wiedząc, że objętość bryły wynosi 40cm3.

39. Półkole o promieniu 20 zwinięto w powierzchnię boczną stożka. Oblicz objętość tak utworzonego stożka.

40. Do garnka w kształcie walca o promieniu podstawy 9cm wpadła śnieżna kula o średnicy 10cm. O ile centymetrów podniesie się poziom wody w garnku?